

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记8——最值问题和相关变率

寻找最值

在上篇文章[曲线构图](#)中，我们可以非常容易地从图上找到函数的最值点。想要求得一个函数的最值点，自然会联想到通过构图寻找，但是构图并不是一个轻松的过程。观察最值点在函数曲线上的位置，可以得出结论：最值点可能存在于临界点、无限远端或驻点。因此仅需要知道这几个点便可以知道函数的最值点。

正方形的最大面积之和

很多情况下最值问题会以文字叙述的形式出现，下面是一个典型的例子：

将一段长为1米的绳子剪成两段，每段围成一个正方形，这两个正方形的最大面积之和是多少？

利用初等代数知识，设其中一段绳长为x米，则另一段是1-x，隐含约束是 $0 < x < 1$

两个正方形的面积之和 $S = (x/4)^2 + ((1-x)/4)^2 = (2x^2 - 2x + 1)/16$

边界值：当 $x \rightarrow 0^+$, $S \rightarrow 1/16$; $x \rightarrow 1^-$, $S \rightarrow 1/16$

开始寻找驻点。

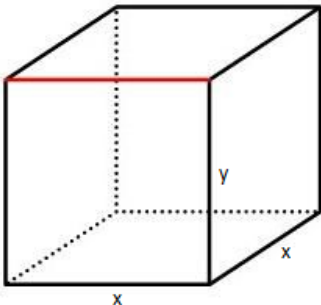
$$S' = \left(\frac{2x^2}{16}\right)' - \left(\frac{2x}{16}\right)' + \left(\frac{1}{16}\right)' = \frac{2x-1}{8} = 0$$

唯一驻点 $x_0 = 1/2$ ，驻点值 $S(x_0) = 1/32$

由于知道S是一个抛物线，所以可以确定驻点值就是最小值；最大值应当在抛物线两端，根据x的定义域，S的极限值是1/16，结合实际就是：其中一段绳子越短，两个正方形的面积之和最大。

盒子的最小表面积

固定容积的无顶盖的盒子，盒子底部是正方形，使其表面积最小是多少？



随笔分类 (211) ★★资源下载★★(1) Java并发编程(1) 程序员的数学(24) 单变量微积分(31) 多变量微积分(24) 概率(24) 机器学习(27) 软件设计(1) 数据分析(6) 数据结构与算法(27) 随笔(5) 线性代数(34) 项目管理(2) 转载(4) 随笔档案 (205) 2021年2月(1) 2020年3月(2) 2020年2月(6) 2020年1月(4) 2019年12月(7) 2019年11月(15) 2019年9月(3) 2019年8月(6) 2019年7月(1) 2019年6月(8) 2019年5月(3) 2019年4月(5) 2019年3月(7) 2019年2月(3) 2019年1月(7) 更多 阅读排行榜 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772) 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430) 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099) 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772) 评论排行榜 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5) 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4) 推荐排行榜 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7) 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5) 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5) 最新评论 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积) 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90° --猫猫猫猫猫大人
--

如上图所示，设盒子的底边 x ，高为 y ，则体积 $V = x^2y$ ，表面积 $S = x^2 + 4xy$

由于体积固定，将 y 用 x 表示， $y = V/x^2$ ， $S = x^2 + 4V/x$

这里含的条件是 $0 < x < +\infty$ ，当 $x \rightarrow 0^+$ ， $S \rightarrow +\infty$ ； $x \rightarrow +\infty$ ， $S \rightarrow +\infty$

边界值没有指望了，寻求驻点：

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(4Vx^{-1})}{dx} = 2x - 4Vx^{-2} = 0$$

有唯一驻点：

$$x_0 = \sqrt[3]{2V} = 2^{1/3}V^{1/3}, \quad y_0 = \frac{V}{x^2} = 2^{-2/3}V^{1/3}$$

$$S = x_0^2 + 4x_0y_0 = 3 \cdot 2^{1/3}V^{2/3}$$

表面积的最小值就是 $3 \times 2^{1/3}V^{2/3}$

这个表达式太长了。我们注意到在驻点 x 和 y 是跟体积有关的定值：

$$\frac{x}{y} = \frac{2^{1/3}V^{1/3}}{2^{-2/3}V^{1/3}} = 2$$

这就是答案，当 $x/y=2$ 时，表面积最小。

解法2，使用隐函数微分法

$$V = x^2y, \quad S = x^2 + 4xy$$

$$V' = (x^2y)' = (x^2)'y + x^2y' = 2xy + x^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2y}{x}$$

$$\begin{aligned} S' &= (x^2 + 4xy)' \\ &= (x^2)' + (4xy)' \\ &= 2x + (4x)'y + 4xy' \\ &= 2x + 4y + 4x \times \frac{-2y}{x} \\ &= 2x - 4y \\ &= 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \end{aligned}$$

最短时间

一辆汽车从小路上的某一点开往高速路尽头的工厂，汽车在小路上和高速的速度是30和60。假设小路上处处可走，且能够随意进入高速，如果汽车要在最短时间内到达工厂，应该从哪里进入高速？

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

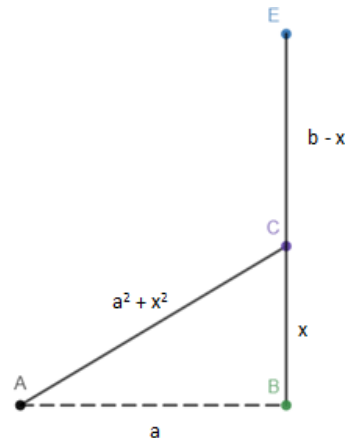
提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



首先将其转化成数学模型：



高速路段BE的长度是 b ，汽车从C点进入高速，问题转换为求最佳的 x 。A到E的总时间：

$$t = \frac{b-x}{60} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{30}$$

$$u = a^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{30} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{\sqrt{u}}{30} \right) \cdot \frac{d(a^2+x^2)}{dx} = \frac{x}{30\sqrt{u}} = \frac{x}{30\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$t' = \left(\frac{b-x}{60} \right)' + \left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{30} \right)' = -\frac{1}{60} + \frac{x}{30\sqrt{a^2+x^2}}$$

当 $t' = 0$ 时，耗时最短，此时 $a^2 = 3x^2$ ，所以 $x = 3^{-1/2}a$ 耗时最短。

然而这并不是全部答案，如果 $x > b$ ，那么直接走直线就是最短的耗时。

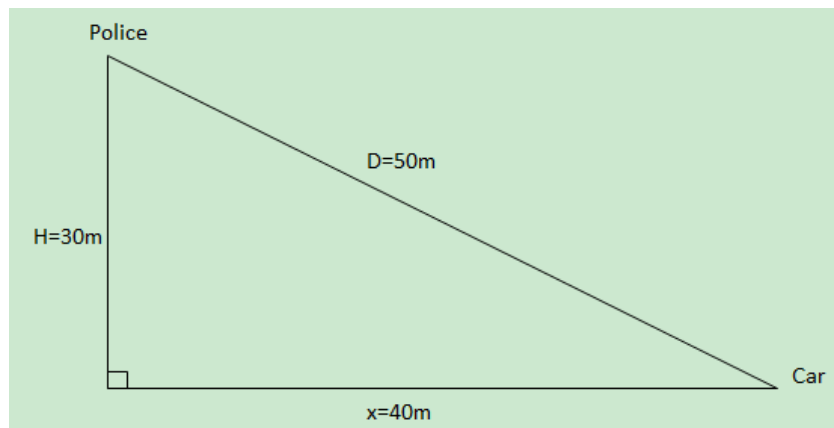
相关变率

相关变率是微积分在实际问题中的一类应用，求解的是变化率问题，通常很有趣。在求解最小表面积时，我们最后使用了隐函数微分法求解，使答案直指目标，在相关变率问题中，继续尝试隐函数微分法。

汽车测速

路段的限速为100km/h，交警手持测速设备在距公路垂直距离为30米的地方对过往车辆测速。一辆汽车在该公路上行驶，测速设备探得该汽车现距离交警50米，以80km/h的速度接近交警，该车是否正在超速行驶？

根据题目可以得到下面的模型：



直角三角形的三边都是已知的，一个隐藏的因素是时间 t ，随着时间的变化， D 和 x 都将发生变化。汽车对于交警的速度相当于距离 D 对于时间 t 的导数，汽车在公路上的速度相当于 x 对于 t 的导数。可使用隐函数微分法求解：

$$D^2 = H^2 + x^2$$

$$2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

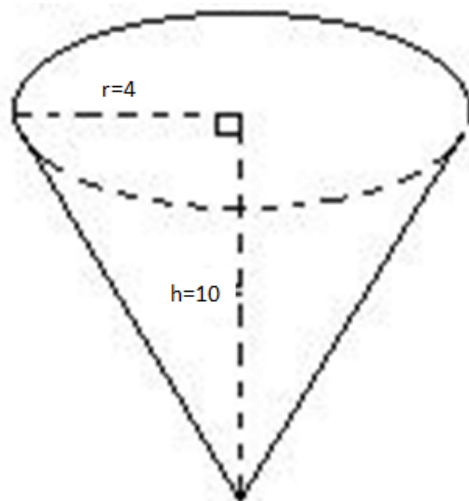
$$2 \times 50 \times 80 = 2 \times 40 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 100$$

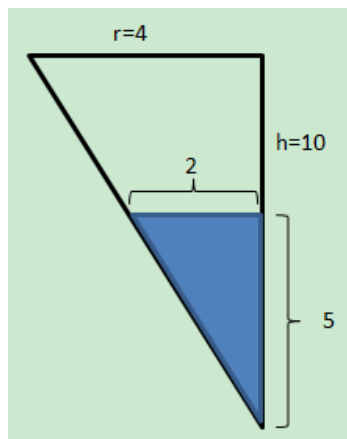
汽车未超速。

水平面上升速度

圆锥体的底面半径为4m，高为10m，以 $2\text{m}^3/\text{sec}$ 的速度向圆锥体注水，在高5m处，水平面上升的速度是多少？



首先将题目进行一次转换，将水深5m的图形画出来，但是再次使用圆锥体已经没有多大意义，只需要圆锥的横截面即可。由此可以把图形转化为直角三角形：



一个已知条件是注水速度，速度相当于水量对于时间的导数，要求解的是水平面高度对于时间的导数。

r 和 h 已知， $r=2h/5$ ，利用体积公式，通过隐函数微分法：

$$V = \frac{h\pi r^2}{3} = \frac{1}{3}h\pi \left(\frac{2h}{5}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \pi \times 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \pi \times 3 \times 5^2 \times \frac{dh}{dt}$$

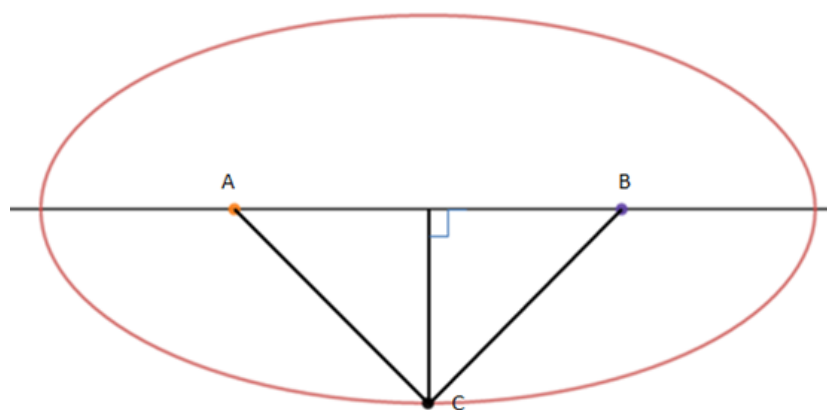
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}$$

答案是 $(1/2\pi)\text{m/sec}$

悬挂模型

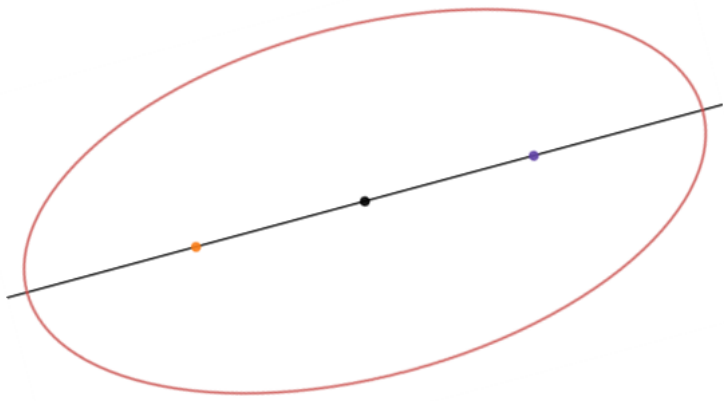
有一根固定长度的绳子，绳上穿有一个可移动的重物。把绳子两端固定，重物将自然下垂，问题是，重物下垂点是什么？

题目中有两个隐含的常量，绳长和两个端点的位置。这很明显要用到椭圆的知识，当绳子两端都在水平面上时，可以得到下面的几何模型：



$\triangle ACB$ 是等腰三角形， AB 和 AC 已知，很容易知道 C 的位置。

然而实际问题往往不这么简单， AB 通常不在水平面上，我们将得到一个倾斜的椭圆：

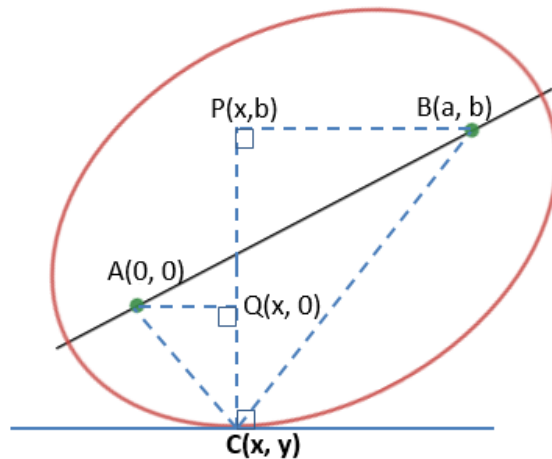


这下有点难度了。

如果我们把椭圆想象成一个密闭的容器，C点看作一个小钢珠，那么无论怎样倾斜这个椭圆，小钢珠都将滑落到椭圆的最低点，也就是切线为0的点。

现在设C点的坐标为(x, y)，C就是椭圆曲线的驻点，约束公式是椭圆曲线的公式，我们又可以使用隐函数微分法了。

这似乎没有问题，但实际操作时会发现，由于椭圆是倾斜的，我们不得不引入一些其他变量，这使得该方法异常麻烦，以至于一开始就放弃了。必须想办法把约束公式转换为更简单的模型：



如上图所示，引几条辅助线，形成两个直角三角形，并且 $PC \perp$ 切线。设A点的坐标是(0,0)，B点坐标为(a,b)，由此可知P和Q的坐标分别是(x,b)，(x,0)， $QA=x$ ， $QC=-y$ ， $PC=b-y$ ， $PB=a-x$ ；设绳长为L，于是约束公式变成了：

$$\begin{aligned}
 L &= AC + BC \\
 &= \sqrt{QA^2 + QC^2} + \sqrt{PC^2 + PB^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \\
 &= (x^2 + y^2)^{1/2} + ((a-x)^2 + (b-y)^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

可以使用隐函数微分法了，此处分开计算。

1) 设 $u=x^2+y^2$, 根据链式求导法则:

$$\begin{aligned}\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)' &= \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'(x^2+y^2)' \\ &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(2x+2yy') \\ &= \frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

2) 设 $u=(a-x)^2+(b-y)^2$, 根据链式求导法则:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}\right)' \\ &= \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'((a-x)^2+(b-y)^2)' \\ &= \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'((a-x)^2)' + ((b-y)^2)' \\ &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(2(a-x)(a-x)' + 2(b-y)(b-y)') \\ &= \frac{1}{2}((a-x)^2+(b-y)^2)^{-\frac{1}{2}}(2(a-x)(-1) + 2(b-y)(-1)y') \\ &= -\frac{(a-x)+(b-y)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}\end{aligned}$$

1)和2)的求导都反复使用了链式求导法则。

3) 结合约束公式:

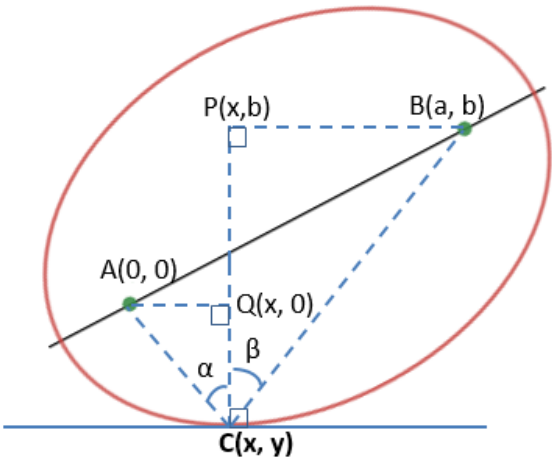
$$\begin{aligned}L' &= \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{(a-x)+(b-y)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} = 0 \\ \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{(a-x)+(b-y)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}\end{aligned}$$

看上去很复杂, 但是由于C点是驻点, 所以 $y' = 0$, 代入上式后:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}$$

这就是答案了, 它展示了xy与ab的关系, 但是太过复杂, 严重怀疑在实际应用中是否有价值。

代数上太复杂了, 可以看看它的几何意义。



如果把等式代入上图，那么得到下面的结果：

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{PB}{PC}$$
$$\cos\alpha = \cos\beta$$
$$\alpha = \beta$$

这就是有意义的结果了。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [最值](#), [相关变率](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

0

推荐

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记7——曲线构图](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记9——牛顿迭代法](#)

posted on 2017-09-20 22:31 我是8位的 阅读(1839) 评论(0) 编辑 收藏 举报

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes